深い学びの実現を意図した数学的活動の開発
― 中学校第２学年「図形の合同」SSA 条件の探究を通して ―

蒔苗　翼
教科領域コース

１．研究の目的と方法

本研究の目的は，中学校第２学年「図形の合同」において，「２組の辺とその間にない角」(Side-Side-Angle)(以下，「SSA 条件」とする)を題材として，深い学びの実現を意図した数学的活動を開発し，その数学的活動の効果を特定することである。そのために，条件を変化させて結果を考察する作図による探究と，既習の知識を用いて三角形の構造理解を深める授業を設計し，実践する。そして，その学習過程に見られる生徒の特徴的な活動や記述物を質的に分析し，数学的活動の効果を特定する。

２．本研究に関連する先行研究

(1) 道具的理解と関係的理解

Skemp (1976) は，数学における理解を「道具的理解(instrumental understanding)」と「関係的理解(relational understanding)」の２つに区別した。Skemp によれば，道具的理解とは「理由を伴わない規則(rules without reasons)」を指し，関係的理解とは「何をすべきか，そしてなぜそうするのかを知っていること(knowing both what to do and why)」と述べられている。(p.9)

三角形の合同条件について，教科書の指導書に，指導の要点として「本来，この三角形の合同条件は証明すべきことがらであるが，ここでは三角形が１通りに決まる条件をもとにして，直観的に認める。」(永田潤一郎ほか，2025，p.112)と，まとめられており，三角形の合同条件は今後扱う図形の性質を証明するための道具として，直観的に理解させる内容とされている。よって，三角形の合同条件にそのものに関して，道具的理解を優先した指導となりやすい傾向があると考えられる。

(2)SSA 条件に関わる授業実践例

「三角形が１つに決まるための条件」を扱った荻原(2007)の授業では，「$AB=b$，$BC=a$，$\angle C=\theta$ とするとき，三角形はいくつに決まるかを考察しなさい」という SSA 条件における作図可能な三角形の個数に関する学習問題において，２変数を固定し，残りの１変数の長さをコンパスで変化させながら調べる，という操作的活動を個人追究として取り入れている。

本研究では，この「２変数を固定し，１変数のみコンパスの長さを変えて調べる操作的活動」を，効果を特定する数学的活動として援用する。

(3) 理解の質的評価（SOLO Taxonomy）

生徒の思考の深まりを評価する枠組みとして，Biggs & Collis (1982) による SOLO Taxonomy を用いる。本研究では，SSA 条件における生徒の認識が，操作に基づく事実の列挙(複構造的反応)か

ら，垂線や底辺の長さを用いて，作図できる三角形の個数が変化する様子を理解し，表現できる状態(関係的反応)へと変容するプロセスを捉えるために，表１の指標を適用する。

表１　本研究における SOLO Taxonomy に基づく SSA 条件の構造的理解のレベル

レベル	SSA 条件が与えられたときに作図できる三角形の個数(事前，直後，事後質問紙)
1	・固定された２辺と１角の条件を無視しており，条件や意図を捉えられていない。 ・理由を書いていない，理由が説明になっていないなど，正しく回答できていない。
2	・2 個できる場合を図で示し，2 個できる，とだけ記述するなど特定の数値や結果のみに着目している。
3	・AB の長さを変化させ，三角形の個数が変化する場合分けを記述できているが，個数の変化が連続的な変化でなく，境界の見落としがあるなど，三角形の個数の場合分けが不十分な箇所がある。
4	・AB の長さを変化させ，三角形の個数が変化する境界の見落としがなく，垂線など基準となる長さを具体的な数字で表し，AB の長さとの大小関係(x ＜ h など)で個数が決まることを記述している。
5	・具体的な数値(10cm 等)を使わず，AB，BC の長さや∠C の大きさ，垂線の長さを文字で表したり，図を用いて AB の長さの変化による三角形の個数の変化を表したりして記述している。 ・鋭角三角形の場合のみでなく，直角・鈍角三角形における三角形の個数の場合分けもしている。

３．授業設計

(1) 教材の数学的構造（素材研究）

本研究で扱う SSA 条件（$AC = b,\ BC = a,\ \angle \mathrm{B} = \theta$）は，$AB = x$とおくと，余弦定理より，$b^2 = x^2 + a^2 - 2axcos\theta$となり，この式を$x$についての２次方程式として整理すると，$x^2 - (2acos\theta)x + a^2 - b^2 = 0$。ここで，$y = f(x) = x^2 - (2acos\theta)x + a^2 - b^2 = (x - acos\theta)^2 - a^2\cos^2\theta + a^2 - b^2 \cdots (*)$と表され，三角形の個数は$(*)$の二次方程式の正の実数解の個数として考えられる。

それに対して，図形的にはコンパスによる作図の問題として捉えることができる。BC と∠B を固定し，AC の長さを変化させ，作図可能な三角形の個数を考察する。点 C から AB に下ろした垂線の長さを h とするとき，AC の長さ(半径)と三角形の個数の関係は，表２のように場合分けされる。

表２　SSA 条件の作図による三角形の個数の場合分け

【θ<90°のとき】	【θ≧90°のとき】
• x ＜ h のとき：0 個（解なし） • x ＝ h のとき：1 個（重解・接する） • h＜x＜a のとき：2 個（異なる２つの正の解） • a ≦ x のとき：1 個（正の解が１つ）	• x ≦ a のとき：0 個 • a ＜ x のとき：1 個

また，図１の y=0 未満の直線 AB を負の長さとして捉えると，実数解の個数とコンパスの弧と直線の共有点の個数(三角形の個数)が一致する（θ≧90°も同様)。このように，本教材は単なる図形操作に留まらず，高校数学における三角関数を用いた場合分けや「代数的視点」につながる数学的構造を内包している。

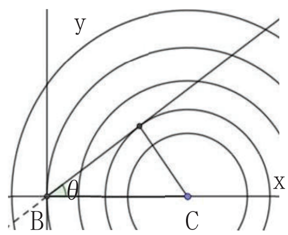

図１　三角形の個数の変化（θ＜90°）

(2) 授業の展開

中学校第２学年において，以下の全２時間の授業を設計した。

① 第１時：操作による探究

「AB=x cm, BC=10cm, ∠C=30° の三角形はいくつできるか」という課題を設定する。生徒はコンパスを用いて AB の長さを少しずつ変化させながら作図を行い，三角形ができる場合とできない場合があることを体験的に理解する。その後，個人の気づきを他者と共有し，条件によって個数が変化することを見いだす。

② 第２時：概念の構造化

前時の結果をもとに，三角形の個数が変化する「境界」に着目させる。円と直線が接する場合（1 個）や，BC の長さを超える場合（1 個）について，その条件を「垂線」や「辺の大小関係」を用いて言語化し，一般化を試みる。また，鋭角三角形だけでなく，直角や鈍角の三角形のときは場合分けが異なることを理解し，まとめた後，振り返りを行う。

４．授業の実際と考察

国立大学法人附属中学校第２学年２クラス（68 名）を対象に実践を行った。以下，質問紙調査の結果と，特徴的な生徒の変容から考察を行う。(全質問紙回答者計 54 名)

(1)質問紙の結果

事前・直後・事後質問紙における A クラス，B クラスの生徒の SOLO のレベルの変容を表３・表４に示す。表４は左から事前・直後，直後・事後質問紙間でレベルが上がった(↗)，変化なし(→)，下がった(↘)様子を表したものである。

表３　SOLO Taxonomy に基づく集計人数

レベル	事前	直後	事後
1	31	7	23
2	22	20	20
3	1	12	8
4	0	8	2
5	0	7	1

表４　事前質問紙，直後質問紙，事後質問紙におけるレベルの変容

レベルの変容	A	B		A	B		A	B
↗ ↗	2	1	→ ↗	2	1	↘ ↗	0	1
↗ →	5	3	→ →	6	3	↘ →	1	1
↗ ↘	9	17	→ ↘	1	1	↘ ↘	0	0

(2)操作的活動による長期的記憶

第１時の個人追究において，「円と直線が接するとき，三角形の個数は１個」という境界条件を記述することができた生徒は，全体の約 29.6%(16 名)に留まった。個人追究でその条件を記述できなかった生徒の事例を取り上げる。

① 事例１：生徒 S1 は事前質問紙で，AB と BC の長さの関係による個数の変化に気づいているが，個人追究(図２)では，「AB が垂線の長さと等しい時，１個」という条件に気づいていない。共同追究により，垂線という基準を発見し，直後質問紙では，鋭角の場合分けに正答している。事後質問紙(図３)においても，個人追究の作図を再現することで，鋭角の場合分けに正答している。このことから，コンパスの長さを変えて調べる操作的活動は，長期的記憶の定着に寄与する。

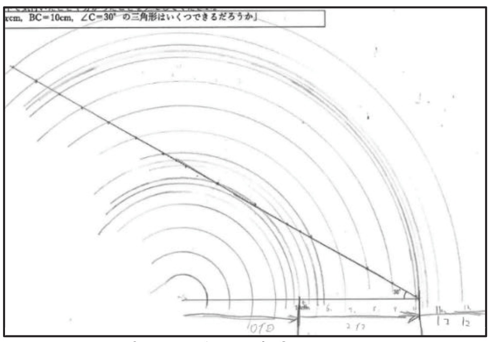

図２　生徒 S1 の個人追究ワークシート

⑶知識の定着と概念の一般化

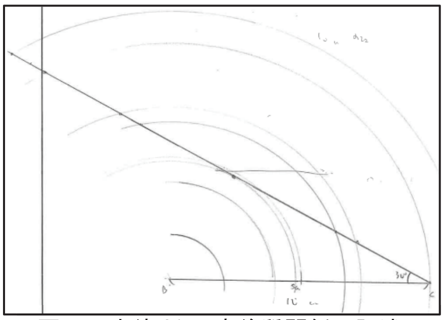

図３　生徒 S1 の事後質問紙の記述

直後質問紙を分析した結果，全体の約 40.7%（22 名）が，辺の長さに応じた「場合分け」を用いて説明しようと試みていた。また，事後質問紙を分析した結果，全体の約 37.0%(20 名)が，辺の長さに応じて三角形の個数が変わることを記述していた。

これは，コンパスの半径を変化させるという操作的活動が，単なる作業に終わらず，生徒の視点を「具体的な長さ（５cm など)」から，「垂線との大小関係」という構造的な理解へと引き上げる足場かけとして機能したことを示唆している。

５．結論

本研究の目的は，中学校第２学年「図形の合同」において，SSA 条件を題材として，深い学びの実現を意図した数学的活動を開発し，その数学的活動の効果を特定することである。そのために，作図による実験的な探究と，既習の知識を用いて三角形の構造理解を深める授業を設計し，実践した。そして，その学習過程に見られる生徒の特徴的な活動や記述物を質的に分析し，数学的活動の効果を特定した。その結果として，次の２点を明らかにした。

⑴コンパスによる動的な操作は，生徒の認識を直観的なレベルから論理的なレベルへと引き上げる効果があり，この操作的活動は長期的な記憶の定着に寄与する。

⑵高校数学レベルの「場合分け」の思考について，動的な操作を取り入れ，視覚的な変化（共有点の数）を根拠とすることで，中学生段階であっても「境界値」に着目し，場合分けのハードルを下げる効果がある。

今後の課題は，発見した事柄を論理的に構成・表現する力の育成である。本実践では視覚的理解には至ったものの，それを自律的に記述する段階で困難が見られた。今後は，操作の目的意識をより明確にするとともに，単元全体を通して論理的な説明力を高める指導法の開発が求められる。

引用・参考文献

永田潤一郎 ほか (2025).『未来へひろがる数学２　指導書　第２部　詳説　朱註編』, pp.112-113 新興出版社啓林館.

荻原文弘(2007). 「｢作図｣｢分類｣｢表づくり｣などを取り入れたレポートや個人追究を積極的に取り入れる」. 『教育科学/数学教育』, 48 巻, ３号, pp.34-38. 明治図書出版株式会社.

川上貴(2010). 「小学校低学年の分布の見方に関する実態―分布を推測する様相に焦点をあてて―」. 『数学教育学会誌』, Vol.51, No.１・2, pp.1-14.

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, pp.20-26.

Biggs, J.B. & Collis, K.F. (1982). Evaluating the quality of learning: The SOLO Taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome). *New York Academic Press,* pp.23-25.